**Sintesi Completa ed Esaustiva degli Appunti: Probabilità, Inferenza e Modelli Dinamici**

**6. Reasoning Under Uncertainty**

**6.1 Bayesian Probability**

1. **Concetti fondamentali:**
   * La probabilità bayesiana rappresenta un grado di credenza soggettiva piuttosto che una frequenza relativa.
   * Consente di aggiornare le credenze iniziali (prior) basandosi sull'evidenza osservata.
2. **Probabilità Condizionale:**
   * **Definizione**: Misura quanto si crede in un'ipotesi hh dato un'evidenza ee, scritta P(h∣e)P(h|e).
   * **Formula**: P(h∣e)=P(e∣h)⋅P(h)P(e)P(h|e) = \frac{P(e|h) \cdot P(h)}{P(e)}
     + P(h)P(h): Probabilità a priori (credibilità iniziale dell'ipotesi).
     + P(e∣h)P(e|h): Verosimiglianza (probabilità dell'evidenza dato hh).
     + P(e)P(e): Probabilità marginale dell'evidenza (normalizzatore).
     + P(h∣e)P(h|e): Probabilità a posteriori (credibilità aggiornata).
3. **Proprietà importanti:**
   * **Regola della Catena**: P(a1∧a2∧⋯∧an)=P(a1)⋅P(a2∣a1)⋅⋯⋅P(an∣a1∧⋯∧an−1)P(a\_1 \land a\_2 \land \dots \land a\_n) = P(a\_1) \cdot P(a\_2|a\_1) \cdot \dots \cdot P(a\_n|a\_1 \land \dots \land a\_{n-1})
4. **Valori attesi:**
   * **Definizione**: Media pesata dei possibili valori di una variabile casuale VV, calcolata come: E(V)=∑ω∈ΩV(ω)⋅P(ω)\mathbb{E}(V) = \sum\_{\omega \in \Omega} V(\omega) \cdot P(\omega)
   * **Valore atteso condizionato**: E(V∣e)=∑ω∈ΩV(ω)⋅P(ω∣e)\mathbb{E}(V|e) = \sum\_{\omega \in \Omega} V(\omega) \cdot P(\omega|e)

**6.1.5 Teoria dell'Informazione**

1. **Concetti fondamentali:**
   * **Bit**: Unità base di informazione, può assumere i valori 00 o 11.
   * **Entropia**: Misura dell'incertezza associata a una distribuzione di probabilità. H(X)=−∑xP(x)⋅log⁡2P(x)H(X) = - \sum\_{x} P(x) \cdot \log\_2 P(x)
   * **Informazione attesa**: I(e)=∑xP(x)⋅log⁡2P(x)I(e) = \sum\_{x} P(x) \cdot \log\_2 P(x)
2. **Informazione da un test:**
   * Misura la riduzione dell’incertezza fornita dall’evidenza: I(h∣e)=−P(h∣e)⋅log⁡2P(h∣e)−P(¬h∣e)⋅log⁡2P(¬h∣e)I(h|e) = -P(h|e) \cdot \log\_2 P(h|e) - P(\neg h|e) \cdot \log\_2 P(\neg h|e)

**6.3 Belief Networks (Reti Bayesiane)**

1. **Definizione:**
   * Modello probabilistico che rappresenta variabili casuali e le loro relazioni tramite una rete diretta aciclica (DAG).
2. **Costruzione:**
   * **Variabili:**
     + **Osservabili**: Variabili di cui possiamo misurare il valore.
     + **Latenti**: Variabili non osservabili ma utili per semplificare il modello.
   * **Relazioni**:
     + Espresse tramite **probabilità condizionali** (es. P(X∣Y)P(X|Y)).
3. **Fattori:**
   * Un **fattore** è una funzione che mappa un insieme di valori di variabili a un numero (es., una probabilità).
   * Rappresentazione tramite tabelle di probabilità condizionale (CPT).

**6.4 Probabilistic Inference**

1. **Inferenza Esatta:**
   * **Obiettivo**: Calcolare distribuzioni posteriori senza approssimazioni.
   * **Metodi**:
     + **Eliminazione di variabili**.
     + **Condizionamento ricorsivo**.
   * **Limiti**: Può essere computazionalmente onerosa (problemi NP-hard).
2. **Inferenza Approssimativa:**
   * **Utilizzo**: Quando l’inferenza esatta è impraticabile.
   * **Tecniche principali**:
     + **Rejection Sampling**: Campiona finché i valori rispettano l'evidenza.
     + **Importance Sampling**: Pesa i campioni in base alla loro rilevanza.
     + **Particle Filtering**: Metodo iterativo per aggiornare distribuzioni posteriori.
3. **Simulazione Stocastica:**
   * Genera campioni casuali dalla distribuzione posteriore.
   * Approcci:
     + **Sampling da una singola variabile**: Campiona valori proporzionalmente alla loro distribuzione cumulativa.
     + **Forward Sampling**: Genera campioni da una rete bayesiana partendo dalle variabili radice.

**6.5 Modelli Dinamici**

1. **Catene di Markov:**
   * **Definizione**: Rappresentano sequenze di stati con l’assunzione di indipendenza Markoviana: P(St+1∣St,St−1,… )=P(St+1∣St)P(S\_{t+1}|S\_t, S\_{t-1}, \dots) = P(S\_{t+1}|S\_t)
   * **Proprietà principali**:
     + Modello semplice da specificare.
     + Può essere stazionario e indefinito nel tempo.
2. **Hidden Markov Models (HMM):**
   * **Estensione** delle catene di Markov con osservazioni parziali.
   * **Componenti principali**:
     + P(S0)P(S\_0): Condizioni iniziali.
     + P(St+1∣St)P(S\_{t+1}|S\_t): Dinamica del modello.
     + P(Ot∣St)P(O\_t|S\_t): Modello dei sensori.
3. **Dynamic Belief Networks (DBN):**
   * **Definizione**: Estensione degli HMM con rappresentazioni in termini di feature.
   * **Applicazioni**:
     + Supportano modelli complessi e dinamici.

**Conclusioni**

Questi appunti sintetizzano i concetti fondamentali di probabilità, inferenza e modelli dinamici, offrendo una comprensione strutturata delle basi teoriche e delle loro applicazioni. Sono trattati i metodi esatti e approssimativi per l'inferenza, con un’enfasi sui modelli probabilistici (HMM, DBN) e le loro implementazioni pratiche.